

“双球实验”：把两个气球联通，气体向哪儿流？

作者：石文泽

南京外国语学校



摘要

许多人或许认为将两个部分充气的气球连接在一起时，空气会由大的气球流向小的气球。这似乎符合我们的直觉，但真相确实如此吗？有人提出在适当的初始条件下，空气会由小气球流向大气球。本文将通过理论和实验对此现象进行研究。

本文将运用热力学和材料学知识来分析这个现象并分别定量确定两种流向发生的条件，同时我们将用实验进行验证。在此实验中，橡胶的特殊材料学性质对结果有重要影响，该性质或对工业和科技生产起到一定的作用

关键词：气压，Jame-Guth 公式，理想橡胶，三通管

目录

摘要-----	2
问题重述及分析 -----	4
预实验-----	4
模型假设和定义物理量-----	7
理论分析-----	8
确定压强—半径曲线-----	8
结果分析-----	10
实验验证-----	12
实验器材-----	12
实验方法：压强曲线-----	13
压强曲线的实验数据-----	13
结果分析-----	14
实验方法及数据：双球实验-----	14
结论-----	16
误差分析-----	16
参考文献-----	17

1. 问题重述及分析

两个气球被部分充气，并通过带有阀门的细管连接起来。根据初始体积的不同，空气可以流向不同的方向。

易知，导致气体流向不同的原因是两球里面的气压差，我们需要定量确定气压和气球半径的关系(p - r 关系)，从而根据给定体积确定气体流向。

在理论部分，我们会研究橡胶的材料学性质和热力学定律对 p - r 关系的影响，接下来将由实验具体分析三种可能的情形：从大球流向小球，从小球流向打球，无气流。

2. 预实验

通过预实验我们观察到了以下现象，发现初始体积改变时，气体流向可能从大到小，也可能从小到大。

1. 从大到小:

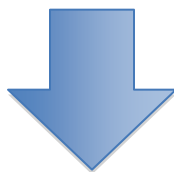


图 1. 大气球缩小，小气球膨胀直到体积相等

2. 从小到大



图 2. 小气球缩小至接近初始体积（未充气体积），大气球膨胀，两者体积差距增大

3. 模型假设和定义物理量

本文中，我们作出如下假设：

- 1. 为了简化计算，我们假设气球为理想橡胶气球，非理想气球的情况将在后文简要说明。
- 2. 由于气球不是完美球体，这里的“半径”则指等效半径，满足

$$V = \frac{4}{3}\rho r^3.$$

- 3. 假设此过程为准静态、恒温过程。

以下是本文中用到的物理量：

V	气球体积
R	气球半径
d	球壁厚度
k	玻尔兹曼常数， $k = 1.38 \times 10^{-23} J / K$
p	压强
F	力
C	其他常数
T	绝对温度

4. 理论分析

4.1 确定压强—半径曲线

显然，气体会由气压大的气球流向气压小的气球。

我们从半径为 R 的理想气球选取面积为 dS 的球壁微元，并分析其受力。

首先，大气压力 $p_0 dS$ 指向球心。其次，面元周围的其他小面元对我们选中的面元产生张力，由于对称性，切向力抵消，合力指向球心，在宏观作用上产生一个压力 $p_1 dS$

为了使面元受力平衡，必须满足 $p dS = p_0 dS + p_1 dS$ ，因此我们有 $p = p_0 + p_1$ 。

由于 p_0 对两个气球等值， p_1 的值决定了气流方向。下面我们将求出 p_1 和 R 的关系。（之后提到的“压强”均指 p_1 ）

我们假设每个面元都是理想平行六面体。由 James-Guth 公式，

$f_i = \frac{1}{d_i} [kKT(\frac{d_i}{d_0})^2 - pV]$ 。这里， f_i 代表面元受到周围面元挤压的法向力， d_i 和 d_0 分别表示末半径和初始半径。 k 代表玻尔兹曼常数， K 是与物体内部粒子排列构造方式数量相关的量。

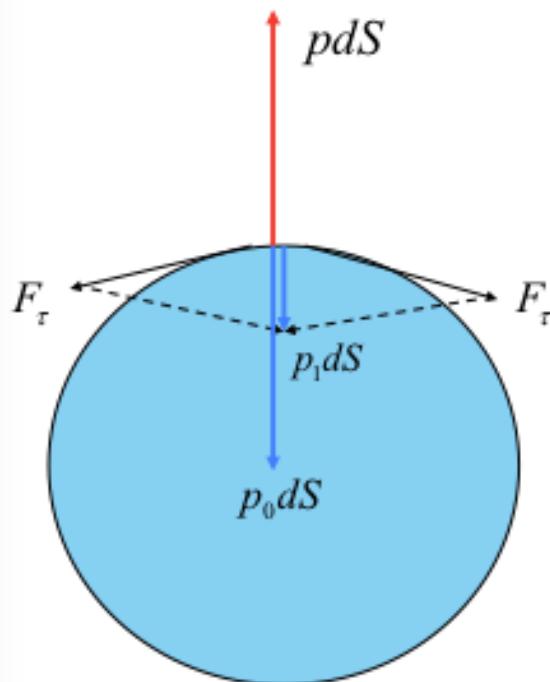


图 3

由于橡胶体积很难改变，可假设 V 是常量，从而等式可改写为

$$f_i = \frac{C_1}{d_i} (l_i^2 - C_2 p), \text{ 这里 } C_1 = kKT, C_2 = \frac{p}{kKT}, l_i = \frac{d_i}{d_0}.$$

对于理想气球，周围面元对选中的小面元的力应为切向力，因此法向力 f_i 的大小为

$$0, \text{ 从而有 } l_i^2 = \left(\frac{d_i}{d_0} \right)^2 = C_2 p. \text{ 橡胶的体积可近似看作 } V = 4pR^2 d, \text{ 因}$$

$$\text{此 } d \propto \frac{1}{R^2}. \text{ 所以 } \frac{d_i}{d_0} = \left(\frac{r_0}{r_i} \right)^2, p = \frac{1}{C_2} \left(\frac{r_0}{r_i} \right)^4$$

$$\text{因此切向力的大小 } f_t \propto \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{r_0}{r_i} \right)^6 \right]. \text{ 球壁产生的压强大小为}$$

$$p = \frac{f_t}{pR^2} = \frac{C}{r_0^2 r_i} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r_i} \right)^6 \right]. \text{ 求 导 得 最 大 压 强 在}$$

$$r_i = \sqrt[6]{7} r_0 \gg 1.38 r_0 = r_p \text{ 时取到。}$$

根据以上结论我们可对理想橡胶气球绘制出 p-r 图：

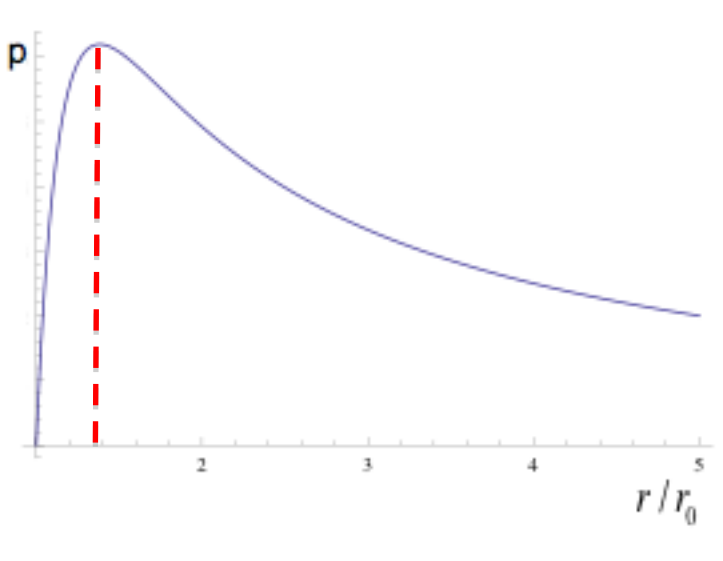


图 4

4.2 结果分析

由上图得出，随着气球体积的增加，压强先增后减，存在一个极大值，这符合我们得日常经验。

打开阀门时，有可能出现一下 3 种情况：

(i) 空气由大气球流向小气球 ($p_{big} > p_{small}$)

在如下条件下会出现这种现象：

(1) $r_{small} < r_{big} < r_p$

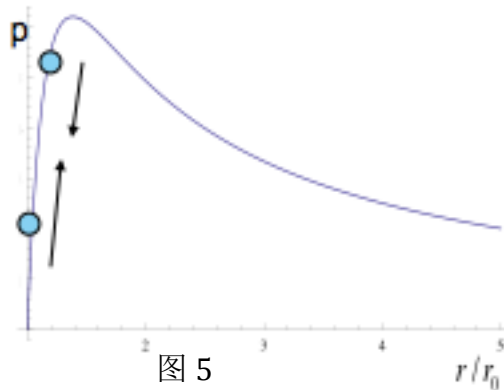


图 5

(2) $r_{small} < r_p < r_{big}, p_{big} > p_{small}$

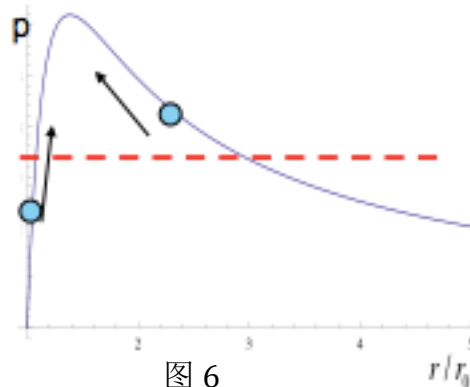


图 6

(3) $r_p < r_{small} < r_{big}$

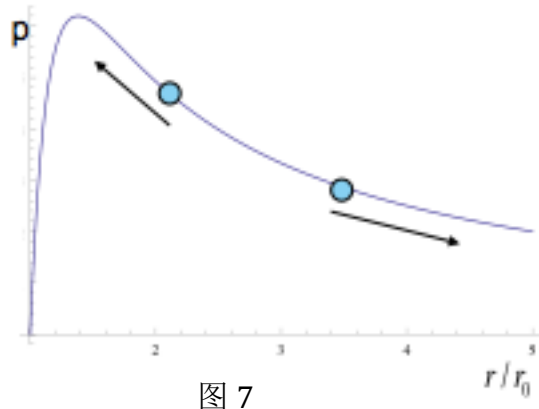


图 7

(ii) 空气从小气球流向大气球

$$(p_{big} < p_{small})$$

$$\text{条件: } r_{small} < r_p < r_{big}, p_{small} > p_{big}$$

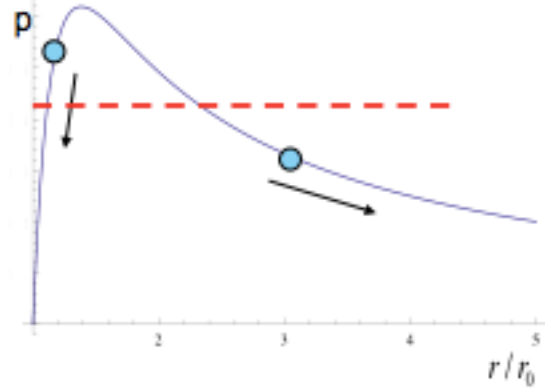


图 8

(iii) 无气流 ($p_{big} = p_{small}$)

下求此时两气球体积与压强极大值对应的体积的关系:

$$\text{由 } P = \frac{f_t}{\rho R^2} = \frac{C}{r_0^2 r} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right],$$

$$\text{可得出 } \frac{r_A^7 - r_B^7}{r_A - r_B} = \frac{r_A^6 r_B^6}{r_0^6}, \text{ 这里 A,}$$

B 分别代表两个气球。替换成体

积关系可得以下式子:

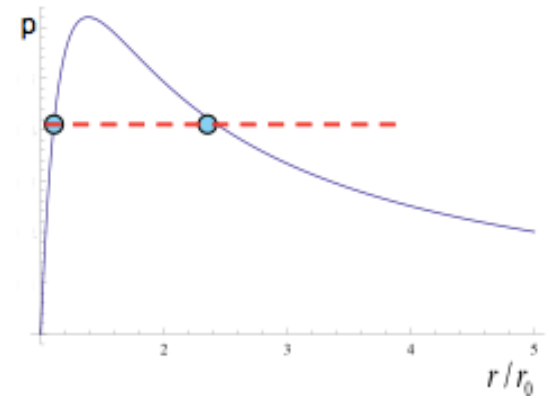


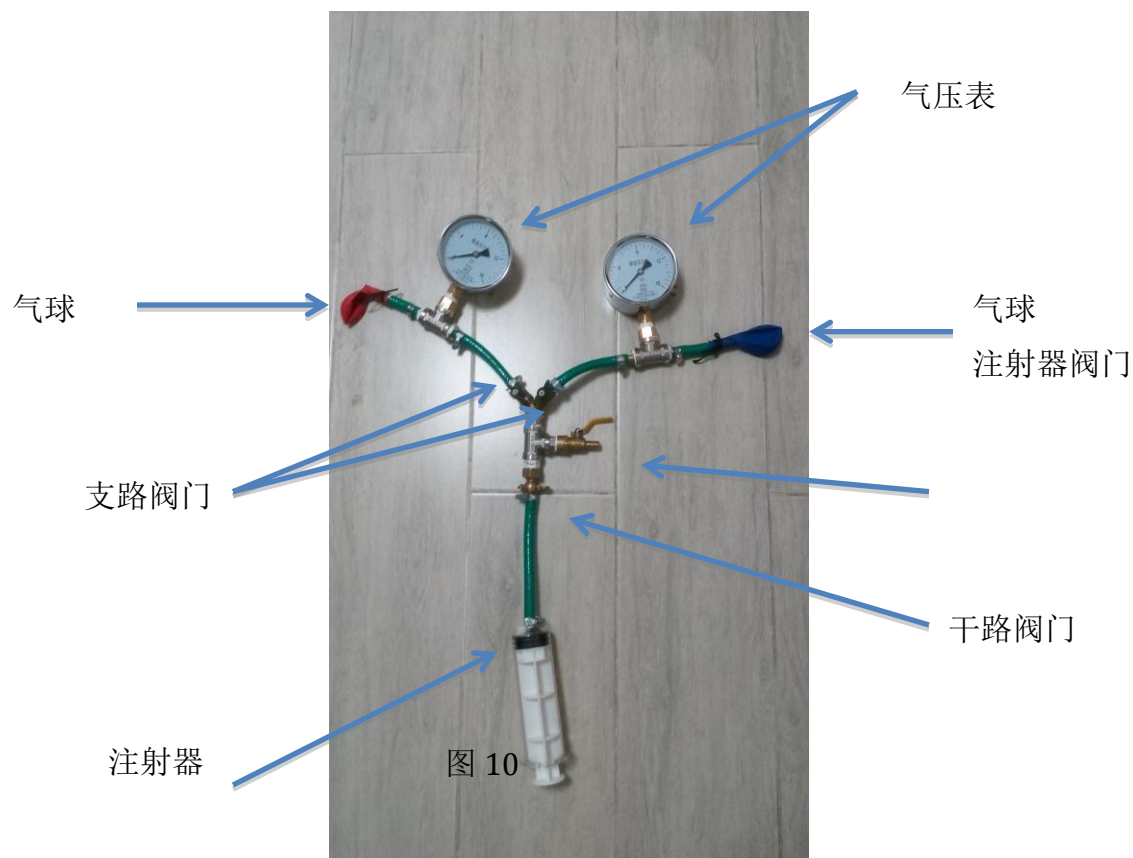
图 9

$$V_0 = V_A \left[\frac{\left(\left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\frac{7}{3}} - 1 \right)} \right]$$

5. 实验验证

5.1 实验器材

下图是本实验主要装置之一——三通管：



这里，支路阀门控制 2 个支路的气流，注射器阀门将系统与外界空气相连，控制进入注射器的气流；干路阀门控制整个系统的气流。

实验第一部分，我们只用干路和 1 条支路，研究 p - r 关系，第二部分我们将做双球实验观察气体流向。

5.2 实验方法：压强曲线

首先我们确定初始体积（未充气体积） V_0 ，或等效的 r_0 。

向气球泵入空气直到气压表开始出现示数，记录泵入空气体积 V_0 。

确定 V_0 后，继续泵入空气，记录体积 V_i 和此时的气压表示数 p_i ，

重复多次实验，记录多组数据。由于 $\frac{V_i}{V_0} = \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^3$ ，我们可以得出 $p - \frac{r_i}{r_0}$

实验曲线并与理论曲线比较。

5.3 压强曲线的实验数据

根据实验得出气球的初始体积为 36mL. 下图中，蓝色曲线为 p-r 关系的理论值，红色曲线为根据实验数据绘制的实验曲线。

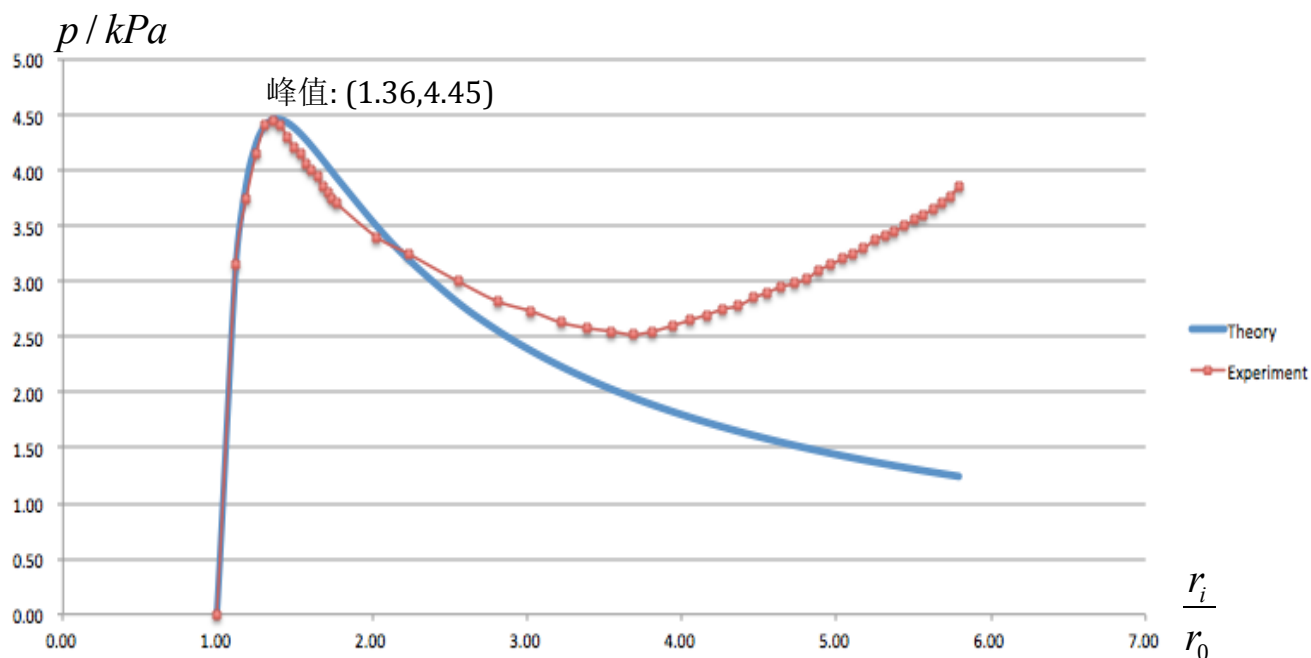


图 11

对比两曲线可看出当充气体积较小时，理论和实验值差别很小，但是充气体积较大时，实验值很明显的大于理论值。

5.4 结果分析

我们发现压强最大值在 $\frac{r_i}{r_0} = 1.36$ 时取到，这与理论值 1.38 很接近。

但是当半径比大于约 2.5 时实验值开始明显大于理论值并在半径比大约 3.7 时达到一个极小值。

造成这样一种差异的原因是实验中使用的气球是非理想气球。在气球膨胀的很大时，其压强会受诸多因素影响，例如：分子晶格结构，分子链的灵活性和气球疲劳。在大比例膨胀的情况下，情形将会变得很复杂并具有一定的随机性，很难确定压强一半径关系的确切值。

5.5 实验方法和结果：双球实验

在这个部分我们用三通管连接 2 个气球，同时记录压强和体积，并检测气体流向，结果见下表。这里 p 代表系统平衡时两球球壁产生的相等的压强。

为了避免气球疲劳导致数据的不准确，我们每组实验都使用不同的气球。

组号	V_1/mL	p_1/kPa	V_2/mL	p_2/kPa	p/kPa	气流方向
1	400	2.70	1000	2.30	2.05	从小到大
2	400	2.70	1600	2.15	1.95	从小到大
3	400	2.70	2000	2.20	2.00	从小到大
4	400	2.70	2400	2.10	2.00	从小到大
5	2000	2.20	6400	3.40	2.00	从大到小
6	2500	2.00	4200	2.80	1.90	从大到小
7	1800	2.30	4800	3.00	2.15	从大到小
8	60	3.60	130	4.00	4.30	从大到小
9	200	3.35	6600	3.35	3.35	无气流
10	300	3.20	5400	3.20	3.20	无气流

以上结果验证了气体永远从气压大的气球流向气压小的气球，并且在达到平衡时，两球气压相等，尽管两球体积可能有所不同。一般来说，当气体从大气球流向小气球时，达到平衡时两球体积相等；反之两球体积差距会加大，但压强差距会减为零。两球初始压强若相等（体积不一定相等），则不会有气流，这与之前的理论和实验吻合。

6. 结论

双球实验中，气体永远从气压大的气球流向气压小的气球。理想状况下，随着气球体积的增加，压强先增后减，当半径为初始半径的 1.38 倍时达到极大值。但是对于非理想气球，半径足够大时，压强会随着半径增大再次回升，在半径约为初始半径的 3.7 倍时达到极小值。此过程很复杂并具有一定的随机性。

根据初始体积的不同，气体流向可以是从小到大，从大到小和无气流。三种情形都在实验中得以验证。

7. 误差分析

如下几个因素可能导致实验误差：

1. 压强计的精度有限，可能导致实验结果的不精确。
2. 实验中不可避免的会有极少量气体逸出，会对结果造成轻微影响。
3. 气体注入气球后，其压强和温度会略微改变，这会对体积测量造成轻微影响。
4. 器材内部存在摩擦，会影响结果的准确性。

8. 参考文献

1. Wikipedia: Two balloons experiment,

http://en.wikipedia.org/wiki/Two-balloon_experiment

2. F. Weinhaus and W. Barker. On the equilibrium states of interconnected bubbles or balloons. Am. J. Phys. 46, 978-982 (1978)